IA : TAMBA	Prof : M. DRAME
Lycée : Koumpentoum	Classe : Première S_2
Année : 2024-2025	Chapitre : Polynômes

SERIE N°1 : Polynômes.

EXERCICE N°1

1. On donne le polynôme $P(x)$:
   $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2$.

Montrer que $P(x)$ est divisible par $x - 1$ et par $x - 2$ puis factoriser $P(x)$.

1. On donne le polynôme $P(x)$:
   $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.
   Résoudre l'équation $P(x) = 0$ sachant que $P(x)$ a deux racines opposées.

EXERCICE N°2

A) On donne le polynôme $P(x)$:
$P(x) = x^4 + kx^2 + e$, k et e des réels. Déterminer k et e de manière que $P(x)$ soit divisible par $x^2 - 6x + 5$.

B) Soit $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx - 1$

1. Trouver les réels a et b pour que $P(x)$ soit divisible par $(x-1)^2$.
2. Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation $P(2x - 1) = 0$ et $P(2x - 1) > 0$
4. Résoudre l'équation $P(x) = -1$.

EXERCICE N°3

Soit l'équation (E) : $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$.

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Démontrer que si α est une solution de (E) alors $\frac{1}{\alpha}$ est une solution de (E).
3. Montrer que (E) est équivalent à (E').

(E') : $x^2 - 4x + 2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

4. Calculer $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.
5. En posant $X = x + \frac{1}{x}$, montrer que (E') se ramène à une équation du second degré.
6. Résoudre l'équation du second degré, puis en déduire les solutions de (E).

EXERCICE N°4

A) Les restes de la division euclidienne d'un polynôme $P(x)$ par $x - 1$ et $x - 2$ sont respectivement 6 et 18. Déterminer le polynômes reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-1)(x-2)$.

B) Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tel que $P(x) = Q(x) + 1$.
Soit le polynôme $T(x) = [P(x)]^n + [Q(x)]^{2n} - 1$
Montrer que toute racine de $P(x)$ ou de $Q(x)$ est racine de $T(x)$.

EXERCICE N°5

1. Déterminer les polynômes de degré trois dont les divisions par $(x-1)$, par $(x-2)$ et par $(x-3)$ ont le même reste 36. Déterminer celui d'entre qui est divisible par $(x+4)$.
2. Soit $P(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.
   a. Calculer $P(a)$, $P(b)$ et $P(c)$.
   b. En déduire que pour tout réels x, $P(x) = 1$.

EXERCICE N°6

Déterminer les réels a, b et c dans chaque cas.

1. $P(x) = (cx - 2)^2 + ax + b$ soit nul pour tout réel x.
2. $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 + bx + 4$ soit le carre d'un polynôme

EXERCICE N°7

1. Déterminer un polynôme du second degré divisible par $(x-2)$ et par $(x+1)$ et dont le reste de la division par $(x-1)$ soit 5.
2. Déterminer un polynôme du troisième degré divisible par $(x+2)$ et par $(x-1)$ et dont les restes respectifs des divisions par $(x+1)$ et $(x-3)$ soient 10 et 30.

EXERCICE N°8

1. Déterminer $P(x)$, un polynome de degré 6 divisible par $(x-1)^3$, et tel que $1+P(x)$ soit divisible par x^4.
2. Les restes respectifs des divisions d'un polynôme $P(x)$ par $(x-1)$ par $(x+5)$ et par $(x-2)$ sont 9, -39 et 3. déterminer $R(x)$ tel que : $P(x)=(x-1)(x+5)(x-2)Q(x)+R(x)$.

EXERCICE N°9

Dans chacun des cas suivants, déterminer m pour que $F(x)$ soit factorisable par $G(x)$.

1. $F(x)=\ x^4+5x^2+4x-m$ et $G(x)=2x+1$
2. $F(x)=2x^4+4ax^3-5a^2x^2-3a^3x+ma^4$ et $G(x)=x-a$ avec $a\neq 0$.

EXERCICE N°10

Soit $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ avec a,b,c et d des réels.

1. Déterminer d sachant que $P(0)=-12$.
2. Dans la suite on considère que : $P(0)=-12$ et (E) : $P(x+1)-P(x)=3x^2+x$; $\forall x\in\mathbb{R}$.
   a. Calculer $P(1),P(-1)$ et $P(2)$.
   b. Exprimer $P(1),P(-1)$ et $P(2)$ en fonction de a,b et c.
   c. En déduire les valeurs de a,b et c.

EXERCICE N°11

1. a. Déterminer $P(x)$ polynome du second degré, tel que pour tout réel x : $P(x)-P(x-1)=x$;
   b. En déduire la somme $S=1+2+3+\cdots+n$.
2. a. Déterminer $P(x)$ polynôme de degré 3, tel que pour tout réel x : $P(x)-P(x-1)=x^2+x$;
   b. En déduire la somme
   $S=1\times 2+2\times 3+\cdots+n(n+1)$.
3. a. Déterminer $P(x)$ polynôme de degré 3, tel que pour tout réel x : $P(x)-P(x-1)=x^2$;
   b. En déduire la somme $S=1^2+2^2+\cdots+n^2$.

EXERCICE N°12

1. Démontrer que le Polynôme $P(x)=x^n-1$ est divisible par $x-1$. En déduire que 11^n-1 est divisible par 10.
2. Démontrer que le polynôme $Q(x)=x^n+1$ est divisible par $x+1$ si n est impair. En déduire que 6^n+1 est diviseible par 7. Que peut-on dire si n est pair.

EXERCICE N°13

Dans chacun des cas suivants, déterminer m pour que $F(x)$ soit factorisable par $G(x)$.

3. $F(x)=\ x^4+5x^2+4x-m$ et $G(x)=2x+1$
4. $F(x)=2x^4+4ax^3-5a^2x^2-3a^3x+ma^4$ et $G(x)=x-a$ avec $a\neq 0$.

EXERCICE N°14

1. Soit $F(x)=\frac{x^3-10x+3}{x^2-5x+6}$
   Déterminer D_F, puis simplifier $F(x)$.
2. Décomposer les fractions suivantes en éléments simples.
   a. $F(x)=\frac{5x+6}{x+1}$ b) $F(x)=\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-1}$
   c). $F(x)=\frac{9x^2-16x+4}{x^3-3x^2+2x}$

EXERCICE N°15

Soit $P(x)=2x^3-5x^2-3x+2$. les racines de $P(x)$ sont a,b et c.

1. Sans calculer les racines, déterminer $a+b+c$; abc ; $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$; $(a+b+c)^2$; $a^2+b^2+c^2$ et $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.

EXERCICE N°16

1. Déterminer le polynôme $F(x)$ de degré 4 tel que : le coefficient de x^4 est 1 ; $F(x)$ est divisible par x^2+x+1 et le reste de la division de F(x) par x^2-1 est $-3x+9$.

En déduire alors les racines réelles de l'équation $F(x)=0$

2. On appelle polynôme réciproque de degré n tout polynome p verifiant $d^0p=n$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $P\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{P(x)}{x^n}$.
   a. Montrer que si α est une racine non nulle d'un polynôme réciproque P alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P.
   b. Montrer que tout polynôme réciproque de degré n (impair) admet -1 pour racine.
   c. Déterminer le polynôme réciproque de degré 5 admettant pour racines $\alpha_1=2$ et $\alpha_2=2-\sqrt{3}$ tel que $P(0)=2$.
   d. On donne $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et
   $P(X)=X^4-(6-\sqrt{5})X^3+(2-6\sqrt{5})X^2-(6-\sqrt{5})X+1$
   i. Montrer que $\alpha^2=1+\alpha$ puis en deduire α^3 et α^4 en fonction de α.
   j. En déduire alors que α est une racine de $P(x)$.